

Федеральное государственное образовательное бюджетное учреждение  
высшего образования

**«ФИНАНСОВЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ПРИ ПРАВИТЕЛЬСТВЕ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ»  
(Финансовый университет)  
Липецкий филиал**

**Кафедра «Учет и информационные технологии в бизнесе»**

**Рязанцева Е.А.**

**МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ**

**Рабочая программа дисциплины**

для студентов, обучающихся по направлению  
01.03.02 «Прикладная математика и информатика»  
образовательная программа «Анализ данных»,  
профиль «Анализ данных и принятие решений в экономике и финансах»  
(программа подготовки бакалавров)

Липецк 2022

**Рецензент: Пеньков В.Б., доктор физико-математических наук, профессор**

**Рязанцева Е.А.**

**Методы оптимизации.** Рабочая программа дисциплины предназначена для подготовки бакалавров очной и заочной формы обучения, обучающихся по направлению 01.03.02 «Прикладная математика и информатика», образовательная программа «Анализ данных», профиль «Анализ данных и принятие решений в экономике и финансах». - Л.: Липецкий филиал Финуниверситета, кафедра «Учет и информационные технологии в бизнесе», 2022. - 22 с.

Рабочая программа содержит: перечень планируемых результатов освоения образовательной программы (перечень компетенций) с указанием индикаторов их достижения и планируемых результатов обучения по дисциплине, место дисциплины в структуре образовательной программы, содержание дисциплины, семинаров, практических занятий, перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине, фонд оценочных средств для проведения промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине, перечень основной и дополнительной учебной литературы, ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет» ресурсов, необходимых для освоения дисциплины и т.д.

**Учебное издание**  
**Рязанцева Елена Анатольевна**

**Методы оптимизации**

*Программа дисциплины*

Компьютерный набор и верстка Е.А. Рязанцева

Формат 60×90/16. Гарнитура Times New Roman

Усл.п.л. . Изд. № - 2022. Тираж 30 экз.

Заказ №

© Рязанцева Е.А., 2022  
© Липецкий филиал Финуниверситета, 2022

## СОДЕРЖАНИЕ

1. Наименование дисциплины .....	4
2. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине, соотнесенных с планируемыми результатами освоения образовательной программы.....	4
Место дисциплины в структуре образовательных программ.....	4
4. Объём дисциплины в зачетных единицах и в академических часах с выделением объема аудиторной (лекции, семинары) и самостоятельной работы обучающихся .....	4
5. Содержание дисциплины, структурированное по темам (разделам) дисциплины с указанием их объемов (в академических часах) и видов учебных занятий.....	5
5.1. Содержание дисциплины .....	5
5.2. Учебно-тематический план .....	7
5.3. Содержание семинаров, практических занятий.....	8
6. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине.....	10
6.1. Перечень вопросов, отводимых на самостоятельное освоение дисциплины, формы внеаудиторной самостоятельной работы.....	10
6.2. Методическое обеспечение для аудиторной и внеаудиторной самостоятельной работы.....	11
7. Фонд оценочных средств для проведения промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине «Методы оптимизации» .....	13
8. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины .....	19
9. Перечень ресурсов информационно-коммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины.....	20
10. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины	20
11. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине, включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем .....	22
12. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине.....	22

## 1. Наименование дисциплины

Методы оптимизации

## 2. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине, соотнесенных с планируемыми результатами освоения образовательной программы

Код компетенции	Наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции	Результаты обучения (владения, умения и знания), соотнесенные с компетенциями/индикаторами достижения компетенции
ПКП-6	Способность ставить и решать оптимизационные задачи в различных сферах экономики и финансов	1. Демонстрирует знание архитектур современных инструментальных средств реализации оптимизационных задач в различных сферах экономики и финансов.  2. Владеет практическим навыком решения оптимизационных задач  3. Определяет условия применения оптимизационных задачи в различных сферах экономики и финансов.	<b>Знать:</b> оптимизационные методы, принципы и особенности выбора оптимизационных методов в зависимости от поставленной задачи. <b>Уметь:</b> применять оптимизационные методы, принципы и особенности выбора оптимизационных методов в зависимости от поставленной задачи.  <b>Знать:</b> оптимизационные модели в области экономики и финансов. <b>Уметь:</b> разрабатывать оптимизационные модели в области экономики и финансов.  <b>Знать:</b> методы решения оптимизационных задач в различных сферах экономики. <b>Уметь:</b> решать оптимизационные задачи в различных сферах экономики.

## Место дисциплины в структуре образовательных программ

Дисциплина «Методы оптимизации» является дисциплиной общефилиального (предпрофильного) цикла направления подготовки 01.03.02 «Прикладная математика и информатика», профиль «Анализ данных и принятие решений в экономике и финансах».

## 4. Объём дисциплины в зачетных единицах и в академических часах с выделением объема аудиторной (лекции, семинары) и самостоятельной работы обучающихся

Общая трудоемкость дисциплины – 4 зачетные единицы

## Вид текущего контроля – контрольная работа

Вид учебной работы по дисциплине	Всего (в з/е и часах)	Семестр 4 (в часах)
<b>Общая трудоемкость дисциплины</b>	4 з.е. 144 ч.	144
<b>Контактная работа – Аудиторные занятия</b>	68	68
<i>Лекции</i>	34	34
<i>Семинары, практические занятия</i>	34	34
<b>Самостоятельная работа</b>	76	76
Вид текущего контроля	Контрольная работа	Контрольная ра- бота
Вид промежуточной аттестации	экзамен	экзамен

## 5. Содержание дисциплины, структурированное по темам (разделам) дисциплины с указанием их объемов (в академических часах) и видов учебных занятий

### 5.1. Содержание дисциплины

#### 1. Введение в методы оптимизации

Общая постановка задачи оптимизации. Классификация задач. Постановка задачи математического и выпуклого программирования. Безусловный экстремум функции многих переменных (ФМП). Необходимые и достаточные условия существования экстремума ФМП. Приближенные методы определения локального экстремума функций многих переменных. Градиентные методы 1 и 2 порядка. Метод наискорейшего спуска. Метод Ньютона.

#### 2. Введение в математическое программирование

Постановка задачи математического программирования. Классификация задач математического программирования. Постановка задачи линейного программирования. Примеры задач линейного программирования (ЛП): задача о банке, задача о диете, задача об использовании ресурсов, транспортная задача. Общая постановка задачи ЛП и различные формы ее записи (числовая, матричная). Стандартная и каноническая формы задачи ЛП. Геометрия задачи ЛП. Выпуклая многогранная область в  $R^n$ . Проектирование выпуклого многогран-

ника на координатные плоскости. Теорема о проекциях. Теорема о существовании оптимального решения задачи ЛП в случае ограниченности целевой функции. Теорема о достижимости оптимального решения задачи ЛП в угловой точке (в случае ограниченности целевой функции). Строение множества оптимальных решений.

#### 3. Методы решения общей задачи линейного программирования

Графический метод решения задач ЛП при малом числе неизвестных. Линия уровня целевой функции. Алгоритм решения задачи ЛП графическим методом. Сведение задач линейного программирования общего вида к задачам, допускающим решение графическим методом. Симплекс-метод решения задачи ЛП общего вида. Допустимый вид системы ограничений. Допустимый базис. Свободные и базисные неизвестные. Базисное решение. Симплексные таблицы. Алгоритм решения задачи ЛП симплекс-методом. Геометрическая интерпрета-

ция симплекс-алгоритма. Метод искусственного базиса. Двухфазный симплекс-метод. Теорема о конечности симплекс-алгоритма.

#### **4. Теория двойственности**

Постановка взаимно двойственных задач ЛП. Симметричные взаимно двойственные задачи. Экономический смысл двойственности. Основное неравенство для двойственных задач. Основная теорема двойственности и ее следствия. Критерий оптимальности. Теорема равновесия.

Двойственность в экономических задачах. Двойственные цены. Применение двойственности в однопродуктивной задаче.

Несимметричные двойственные задачи, сведение к симметричной паре. Общая постановка взаимно двойственных задач. Основная теорема двойственности в общей постановке.

#### **5. Задачи целочисленного программирования (дискретное программирование)**

Постановка задачи целочисленного программирования. Примеры (задача о назначениях, о коммивояжере и т.п.). Метод ветвей и границ.

Двойственный симплекс-метод. Псевдорешение. Алгоритм двойственного симплекс-метода. Примеры решения задач двойственным симплекс-методом.

Метод Гомори решения задач целочисленного программирования. Примеры задач с экономическим содержанием.

#### **6. Транспортная задача**

Транспортная задача ЛП. Открытая и закрытая модель транспортной задачи. Критерий разрешимости транспортной задачи. Методы построения начального опорного плана транспортной задачи. Потенциалы, их экономический смысл. Решение транспортной задачи методом потенциалов. Двойственность в транспортной задаче. Транспортные задачи с нарушенным балансом запасов и потребностей. Транспортные задачи с ограничениями перевозок.

#### **7. Задачи многокритериальной оптимизации**

Общая постановка многокритериальной оптимизации. Парето-эффективная граница. Методы решения многокритериальной оптимизации. Метод идеальной точки. Метод обобщенного критерия, метод приоритетов.

#### **8. Выпуклое программирование**

Постановка задачи выпуклого программирования. Условия регулярности. Необходимые условия оптимальности (условия Куна-Таккера). Достаточные условия.

Задача квадратичного программирования с выпуклой целевой функцией. Понятие о седловой точке. Связь задачи выпуклого программирования с задачей нахождения седловых точек.

Теория множителей Лагранжа и теорема Куна-Таккера. Экономическая интерпретация множителей Лагранжа. Зависимость решения от параметров.

Решение задачи об оптимальном портфеле ценных бумаг с помощью теоремы Куна-Таккера

Приближенные методы решения задач выпуклого программирования. Метод Франка-Вульфа для решения задач с линейными ограничениями.

Метод штрафных функций для ограничений равенств.

## 9. Динамическое программирование

Метод динамического программирования. Принцип оптимальности и уравнение Беллмана.

Задача о распределении средств между предприятиями. Непрерывный и дискретный случай.

Модели управления запасами. Статическая детерминированная модель без дефицита и с дефицитом. Стохастические модели управления запасами.

## 10. Метод Монте-Карло

Идея, назначение и область применимости метода. Этапы построения моделей. Основные подходы и принципы моделирования. Постановка эксперимента. Обработка результатов. Принятие решений. Примеры моделей реальных систем.

### 5.2. Учебно-тематический план

№ п/п	Наименование тем (разделов) дисциплины	Трудоемкость в часах						Формы те- кущего контроля успеваемо- сти
		Всего	Аудиторная работа				Самостоятельная работа	
			Общая, в т.ч.:	Лекции	Семинары, прак- тические занятия	Занятия в интер- активных формах		
1.	Введение в методы оп- тимизации	12	6	2	4	4	6	Участие в решении за- дач на прак- тических за- нятиях. Со- беседования по домаш- ним задани- ям.
2.	Введение в математиче- ское программирование	12	6	2	4	4	6	
3.	Методы решения общей задачи линейного про- граммирования	14	6	2	4	4	8	
4.	Теория двойственности	14	6	4	2	2	8	
5.	Задачи целочисленного программирования	16	8	4	4	4	8	
6.	Транспортная задача	16	8	4	4	4	8	
7.	Задачи многокритери- альной оптимизации	16	8	4	4	4	8	
8.	Выпуклое программиро- вание	16	8	4	4	4	8	
9.	Динамическое програм- мирование	14	6	4	2	2	8	
10.	Метод Монте-Карло	14	6	4	2	2	8	
	В целом по дисциплине	144	68	34	34	34	76*	Контроль- ная работа
	Итого в %					50%		

\*в том числе промежуточная аттестация -2 часа

### 5.3. Содержание семинаров, практических занятий

Наименование темы (раздела) дисциплины	Перечень вопросов для обсуждения на семинарах, практических занятиях, рекомендуемые источники из разделов 8, 9 (указывается раздел и порядковый номер источника)	Формы проведения занятий
Тема 1. Введение в методы оптимизации	Общая постановка задачи оптимизации. Классификация задач. Постановка задачи математического и выпуклого программирования. Безусловный экстремум функции многих переменных (ФМП). Необходимые и достаточные условия существования экстремума ФМП. Приближенные методы определения локального экстремума функций многих переменных. Градиентные методы 1 и 2 порядка. Метод наискорейшего спуска. Метод Ньютона. <i>Рекомендуемая литература - 8.1-8.2</i>	Решение практико-ориентированных задач в малых группах (2-4 чел.), проверка самостоятельной работы и разбор ошибок
Тема 2. Введение в математическое программирование	Примеры задач линейного программирования (ЛП): задача о банке, задача о диете, задача об использовании ресурсов, транспортная задача. Общая постановка задачи ЛП и различные формы ее записи (числовая, матричная). Стандартная и каноническая формы задачи ЛП. Геометрия задачи ЛП. Выпуклая многогранная область в $R^n$ . Строение множества оптимальных решений. <i>Рекомендуемая литература - 8.1-8.2</i>	Решение практико-ориентированных задач в малых группах (2-4 чел.), проверка самостоятельной работы и разбор ошибок
Тема 3. Методы решения общей задачи линейного программирования	Графический метод решения задач ЛП при малом числе неизвестных. Линия уровня целевой функции. Алгоритм решения задачи ЛП графическим методом. Сведение задач линейного программирования общего вида к задачам, допускающим решение графическим методом. Симплекс-метод решения задачи ЛП общего вида. Симплексные таблицы. Алгоритм решения задачи ЛП симплекс-методом. Метод искусственного базиса. Двухфазный симплекс-метод. <i>Рекомендуемая литература - 8.1-8.2</i>	Решение практико-ориентированных задач в малых группах (2-4 чел.), проверка самостоятельной работы и разбор ошибок
Тема 4. Теория двойственности	Постановка взаимно двойственных задач ЛП. Симметричные взаимно двойственные задачи. Экономический смысл двойственности. Основное неравенство для двойственных задач. Основная теорема двойственности и ее следствия. Критерий оптимальности. Теорема равновесия. Двойственность в экономических задачах. Двойственные цены. Применение двойственности в однопродуктивной задаче. Несимметричные двойственные задачи, сведение к симметричной паре. Общая постановка взаимно двойственных задач. Основная теорема двойственности в общей постановке.	Решение практико-ориентированных задач в малых группах (2-4 чел.), проверка самостоятельной работы и разбор ошибок



	<i>Рекомендуемая литература - 8.1-8.2</i>	
Тема 5. Задачи целочисленного программирования	Постановка задачи целочисленного программирования. Примеры (задача о назначениях, о коммивояжере и т.п.). Двойственный симплекс-метод. Алгоритм двойственного симплекс-метода. Примеры решения задач двойственным симплекс-методом. Метод Гомори решения задач целочисленного программирования. Примеры задач с экономическим содержанием. <i>Рекомендуемая литература - 8.1-8.2</i>	Решение практико-ориентированных задач в малых группах (2-4 чел.), проверка самостоятельной работы и разбор ошибок
Тема 6. Транспортная задача	Транспортная задача ЛП. Открытая и закрытая модель транспортной задачи. Методы построения начального опорного плана транспортной задачи. Решение транспортной задачи методом потенциалов. Транспортные задачи с нарушенным балансом запасов и потребностей. Транспортные задачи с ограничениями перевозок. <i>Рекомендуемая литература - 8.1-8.2</i>	Решение практико-ориентированных задач в малых группах (2-4 чел.), проверка самостоятельной работы и разбор ошибок
Тема 7. Задачи многокритериальной оптимизации	Происхождение и постановка задачи многокритериальной оптимизации. Множество достижимых критериальных векторов. Доминирование и оптимальность по Парето. Эффективные решения и паретова граница. Теорема Куна-Таккера в выпуклых задачах многокритериальной оптимизации. <i>Рекомендуемая литература - 8.1-8.2</i>	Решение практико-ориентированных задач в малых группах (2-4 чел.), проверка самостоятельной работы и разбор ошибок
Тема 8. Выпуклое программирование	Постановка задачи выпуклого программирования. Задача квадратичного программирования с выпуклой целевой функцией. Теория множителей Лагранжа и теорема Куна-Таккера. Экономическая интерпретация множителей Лагранжа. Зависимость решения от параметров. Решение задачи об оптимальном портфеле ценных бумаг с помощью теоремы Куна-Таккера Приближенные методы решения задач выпуклого программирования. Метод Франка-Вульфа для решения задач с линейными ограничениями. <i>Рекомендуемая литература - 8.1-8.2</i>	Решение практико-ориентированных задач в малых группах (2-4 чел.), проверка самостоятельной работы и разбор ошибок
Тема 9. Динамическое программирование	Метод динамического программирования. Принцип оптимальности и уравнение Беллмана. Задача о распределении средств между предприятиями. Непрерывный и дискретный случай. Модели управления запасами. Статическая детерминированная модель без дефицита и с дефицитом. Стохастические модели управления запасами. <i>Рекомендуемая литература - 8.1-8.2</i>	Решение практико-ориентированных задач в малых группах (2-4 чел.), проверка самостоятельной работы и разбор ошибок
Тема 10.	Идея, назначение и область применимости метода.	Решение практи-

Метод Монте-Карло	Этапы построения моделей. Основные подходы и принципы моделирования. Постановка эксперимента. Обработка результатов. Принятие решений. Примеры моделей реальных систем. <i>Рекомендуемая литература - 8.1-8.2</i>	ко-ориентированных задач в малых группах (2-4 чел.), проверка самостоятельной работы и разбор ошибок
-------------------	--	--

## 6. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине

### 6.1. Перечень вопросов, отводимых на самостоятельное освоение дисциплины, формы внеаудиторной самостоятельной работы

Наименование тем (разделов) дисциплины	Перечень вопросов, отводимых на самостоятельное освоение	Формы внеаудиторной самостоятельной работы
Тема 1. Введение в методы оптимизации	Метод наискорейшего спуска. Метод Ньютона.	Работа с учебной литературой. Решение типовых задач. Разбор вопросов по теме занятия. Выполнение домашних заданий к каждому занятию.
Тема 2. Введение в математическое программирование	Выпуклая многогранная область в $R^n$ . Проектирование выпуклого многогранника на координатные плоскости. Теорема о проекциях. Теорема о существовании оптимального решения задачи ЛП в случае ограниченности целевой функции.	Работа с учебной литературой. Решение типовых задач. Разбор вопросов по теме занятия. Выполнение домашних заданий к каждому занятию.
Тема 3. Методы решения общей задачи линейного программирования	Геометрическая интерпретация симплекс-алгоритма.	Работа с учебной литературой. Решение типовых задач. Разбор вопросов по теме занятия. Выполнение домашних заданий к каждому занятию.
Тема 4. Теория двойственности	Двойственность в экономических задачах. Двойственные цены. Применение двойственности в однопродуктивной задаче.	Работа с учебной литературой. Решение типовых задач. Разбор вопросов по теме занятия. Выполнение домашних заданий к каждому занятию.
Тема 5. Задачи целочисленного программирования	Метод ветвей и границ	Работа с учебной литературой. Решение типовых задач. Разбор вопросов по теме занятия. Выполнение домашних заданий к каждому занятию.
Тема 6. Транспортная задача	Двойственность в транспортной задаче.	Работа с учебной литературой. Решение типовых задач. Разбор вопросов по те-

		ме занятия. Выполнение домашних заданий к каждому занятию.
Тема 7. Задачи многокритериальной оптимизации	Метод приоритетов в задачах многокритериальной оптимизации	Работа с учебной литературой. Решение типовых задач. Разбор вопросов по теме занятия. Выполнение домашних заданий к каждому занятию.
Тема 8. Выпуклое программирование	Приближенные методы решения задач выпуклого программирования. Метод Франка-Вульфа для решения задач с линейными ограничениями. Метод штрафных функций для ограничений равенств.	Работа с учебной литературой. Решение типовых задач. Разбор вопросов по теме занятия. Выполнение домашних заданий к каждому занятию.
Тема 9. Динамическое программирование	Модели управления запасами. Статическая детерминированная модель без дефицита и с дефицитом. Стохастические модели управления запасам	Работа с учебной литературой. Решение типовых задач. Разбор вопросов по теме занятия. Выполнение домашних заданий к каждому занятию.
Тема 10. Метод Монте-Карло	Примеры моделей реальных систем.	Работа с учебной литературой. Решение типовых задач. Разбор вопросов по теме занятия. Выполнение домашних заданий к каждому занятию.

## **6.2. Методическое обеспечение для аудиторной и внеаудиторной самостоятельной работы**

### **Тестовые вопросы для самостоятельной подготовки к текущему контролю**

1. Под экономико-математической моделью понимается:

- А) Отображение свойств экономической системы в виде таблиц, диаграмм, схем
- В) Формально-математическое отображение основных с точки зрения поставленной цели свойств экономической системы
- С) Математическое отображение входов экономической системы
- Д) Математическое отображение выходов экономической системы
- Е) Множество существующих знаний об экономической системе

2. Какие типы моделей существуют?

- А) физические модели, графические модели, детерминистические модели
- В) физические модели, графические модели, динамические модели
- С)) физические модели, графические модели, логико-математические модели
- Д) логико-математические модели, графические модели, балансовые модели

Е) графические модели, балансовые модели, имитационные модели

3. Экзогенные параметры экономико-математических моделей – это такие параметры:

А) Значения, которых определяются вне модели и включаются в нее в готовом виде

В) Значения, которых определяются только после решения модели

С) Значения, которых являются случайными величинами

Д) Значения, которых являются детерминированными величинами

Е) Значения, которых являются вероятностными величинами

4. Эндогенные параметры экономико-математических моделей – это такие параметры:

А) Значения, которых определяются вне модели и включаются в модель в готовом виде

В) Значения, которых определяются только после решения модели

С) Значения, которых являются случайными величинами

Д) Значения, которых являются детерминированными величинами

Е) Значения, которых являются вероятностными величинами

5. Адекватность экономико-математической модели – это:

А) Полное соответствие модели экономической системы

В) Существование методов решения модели

С) Соответствие модели экономической системы

### Примеры заданий контрольной работы

1. Пусть  $C(q) = 2q^3 - 376q^2 + 4100q + 2000$  – функция полных затрат на производство  $q$  единиц товара,  $R(q) = 500q - q^2$  – функция дохода от продажи. Найти максимум прибыли.

2. В каком отношении распределится бремя дополнительного налога между потребителем и производителем, если  $D(p) = \frac{15}{p}$ ,  $S(p) = p - 2$ , а величина

на дополнительного налога мала по сравнению с равновесной ценой?

3. Пусть  $R(q) = 47q - 5q^2$  – доход (выручка) от продажи, а  $C(q) = q^2 - 13q + 14$  – затраты на выпуск продукта в зависимости от количества  $q$ . Найти величину дополнительного налога  $t$  на каждую единицу продукта, чтобы налог  $T = tq$  от всей реализуемой продукции был максимальным, и весь налоговый сбор. Как уменьшится количество выпускаемой продукции?

4. Для товаров  $X_1$  и  $X_2$  известны функции спроса:  $q_1 = 54 - p_1$ ,

$q_2 = 35 - \frac{1}{2}p_2$  . Фирма-монополист имеет функцию издержек

$C = 2q_1^2 + 6q_1q_2 + 3q_2^2 + 4$  . Вычислите максимальную прибыль фирмы в этих условиях и найдите соответствующий производственный план.

5. Для функции полезности  $U(x, y) = 7x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}$  ВЫЯСНИТЬ, ЯВЛЯЮТСЯ ЛИ

наборы товаров а)  $(8, 27)$ , б)  $(6, 7)$ , самыми полезными из всех наборов, имеющих равную с ними стоимость, если  $p_1 = 21$ ;  $p_2 = 36$ .

6. Для функции полезности Кобба–Дугласа  $U(x_1, x_2) = 3x_1^{\frac{1}{3}}x_2^{\frac{2}{3}}$  проверьте, будут ли наборы товаров: а)  $(2, 5)$ , б)  $(7, 10)$  самыми дешевыми среди всех наборов, имеющих равные с ними уровни полезности, если стоимости этих товаров составляют  $p_1 = 40$ ;  $p_2 = 56$ .

7. Решить задачу целочисленного программирования с целевой функцией  $z = 5x + 9y + 3 \rightarrow \max$  и ограничениями:

$$\begin{cases} y - x - 3 \leq 0, \\ y + x - 14 \leq 0, \\ x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{Z}, \\ x \geq 0, y \geq 0. \end{cases}$$

- графическим способом;
- методом Гомори;
- дать геометрическую интерпретацию введения дополнительного ограничения.

8. Фирма, производящая продукцию на двух заводах, решила выпускать в месяц не менее 180 ед. продукции при наименьших суммарных затратах. Сколько продукции ежемесячно целесообразно выпускать на каждом заводе, если затраты на выпуск  $x$  единиц продукции в месяц на первом заводе равны  $C_1(x) = x + \frac{1}{20}x^2$ , а на втором заводе  $C_2(x) = x + \frac{1}{40}x^2$ ?

9. Для функции полезности  $U(x_1, x_2) = (x_1 - 10)^7(x_2 - 15)^3$  и при бюджете  $I = 1853$  найдите оптимальное потребление, если известны цены на блага:  $p_1 = 13, p_2 = 10$ .

10. Найти компромиссное решение задачи методом идеальной точки.

$$\begin{cases} f_1 = 2x_1 + x_2 \rightarrow \max \\ f_2 = 3x_1 + 4x_2 \rightarrow \max \\ \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 18, \\ x_1 \leq 16, x_2 \leq 15, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases} \end{cases}$$

Критерии балльной оценки различных форм текущего контроля успеваемости содержатся в соответствующих методических рекомендациях кафедры.

**7. Фонд оценочных средств для проведения промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине «Методы оптимизации»**

Перечень планируемых результатов освоения образовательной

программы (перечень компетенций) с указанием индикаторов их достижения и

планируемых результатов обучения по дисциплине содержится в разделе 2 «Перечень планируемых результатов освоения образовательной программы (перечень компетенций) с указанием индикаторов их достижения и планируемых результатов обучения по дисциплине».

**Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки индикаторов достижения компетенций, умений и знаний.**

Код компетенций	Наименование компетенций	Примеры заданий для оценки индикаторов достижения компетенций																				
ПКП-6	Способность ставить и решать оптимизационные задачи в различных сферах экономики и финансов	<b>1. Демонстрирует знание архитектур современных инструментальных средств реализации оптимизационных задач в различных сферах экономики и финансов.</b> <b>Задание</b> Решите задачу целочисленного программирования с целевой функцией $z = 5x + 9y + 3 \rightarrow \max$ и ограничениями: $\begin{cases} y - x - 3 \leq 0, \\ y + x - 14 \leq 0, \\ x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{Z}, \\ x \geq 0, y \geq 0. \end{cases}$ методом Гомори. <b>Задание</b> Пусть $C(q) = 2q^3 - 376q^2 + 4100q + 2000$ – функция полных затрат на производство $q$ единиц товара, $R(q) = 500q - q^2$ – функция дохода от продажи. Найдите максимум прибыли.																				
		<b>2. Владеет практическим навыком решения оптимизационных задач.</b> <b>Задание</b> <table border="1"><tr><td></td><td>40</td><td>30</td><td>10</td><td>140</td></tr><tr><td>80</td><td>13</td><td>10</td><td>11</td><td>10</td></tr><tr><td>20</td><td>8</td><td>19</td><td>10</td><td>15</td></tr><tr><td>120</td><td>10</td><td>20</td><td>11</td><td>14</td></tr></table> Решите транспортную задачу . В ответе указать оптимальный план и стоимость перевозок.		40	30	10	140	80	13	10	11	10	20	8	19	10	15	120	10	20	11	14
			40	30	10	140																
80	13	10	11	10																		
20	8	19	10	15																		
120	10	20	11	14																		
<b>Задание</b> Пусть собственные средства банка в сумме с депозитами составляет Р млн. рублей. Часть средств, но не менее Q млн. руб., должна быть размещена в кредитах, а вложения в ценные бумаги должны составлять не менее r%средств, размещенных в кредитах и ценных бумагах. Каково должно быть размещение средств, чтобы прибыль банка была максимальной? с – доходность кредитов, d- доходность ценных бумаг.																						



		<p><b>3. Определяет условия применения оптимизационные задачи в различных сферах экономики и финансов.</b></p> <p><b>Задание</b></p> <p>Фирма, производящая продукцию на двух заводах, решила выпускать в месяц не менее 180 ед. продукции при наименьших суммарных затратах. Сколько продукции ежемесячно целесообразно выпускать на каждом заводе, если затраты на выпуск <math>x</math> единиц продукции в месяц на первом заводе равны <math>C_1(x) = x + \frac{1}{20}x^2</math>, а на втором заводе <math>C_2(x) = x + \frac{1}{40}x^2</math>?</p>
--	--	---

### Примеры типовых заданий

1. Найти Парето-оптимальную границу задачи

$$\begin{cases} f = 5x_1 + 2x_2 \rightarrow \max \\ \end{cases}$$

$$\begin{cases} f = 2x_1 + 4x_2 \rightarrow \max \\ \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 16, \\ x_1 \leq 11, x_2 \leq 14, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

2. Планируется работа двух предприятий на 3 года. Начальные ресурсы равны  $s_0 = 10000$ . Средства  $x$ , вложенные в 1-е предприятие в начале года, дают в конце года прибыль  $f_1(x) = 0,3x$ , и возвращаются в размере  $\phi_1(x) = 0,3x$ .

Средства  $y$ , вложенные в 2-е предприятие в начале года, дают в конце года прибыль  $f_2(y) = 0,2y$  и возвращаются в размере  $\phi_2(y) = 0,5y$ . В конце года воз-

вращенные средства заново перераспределяются между отраслями. Определить оптимальный план распределения средств и найти максимальную прибыль.

3. Найти компромиссное решение задачи

$$\begin{cases} f_1 = 4x_1 + x_2 \rightarrow \max \\ f_2 = x_1 + 3x_2 \rightarrow \max \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 9, \\ x_1 \leq 6, \\ x_2 \leq 7, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

методом обобщенного критерия с соответствующими

весами 0,5; 0,5.

4. Пусть функция спроса имеет вид  $D(p) = 12 - 3p$ , а функция предложения равна  $S(p) = 4 + p$ . Найти эластичность спроса в точке рыночного равновесия. Эластичен ли спрос в этой точке?

5. Пусть  $R(q) = 84q - 2q^2$  — доход (выручка) от продажи, а  $C(q) = q^2 - 6q + 24$  — затраты на выпуск продукта в зависимости от количества  $q$ .

Найти максимум прибыли и количество выпускаемой продукции.

6. Для задачи

$$\begin{cases} f = -3x_4 - 6x_5 + 2 \rightarrow \min \\ \begin{cases} x_1 + x_4 + x_5 = 6, \\ x_2 - x_4 + x_5 = 10, \\ x_2 + x_4 - x_5 = 18, \end{cases} \\ \bar{x} \geq 0. \end{cases}$$

а) составить двойственную задачу; б) решить исходную задачу симплекс-методом и в) найти решение двойственной задачи.

7. Задача линейного программирования

$$\begin{cases} f = 5x_1 + 4x_2 + 2 \rightarrow \min \\ \begin{cases} 6x_1 - 5x_2 \geq -4, \\ 3x_1 - 8x_2 \leq -13, \\ 3x_1 + 3x_2 \leq 42, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases} \end{cases}$$

решение  $f_{\min} = 15$ ,  $X_{\min} = (1; 2)$ . Составьте двойственную задачу и найдите ее решение, используя теоремы двойственности.

8. Пусть в транспортной задаче перевозки от  $A_1$  к  $B_2$  и от  $A_3$  к  $B_3$  временно запрещены. Найти оптимальный план и стоимость перевозки.

	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	
$A_1$	2		4	6	1
$A_2$	4	5	6	8	8
$A_3$		18		20	0

	00	0	0	0	
--	----	---	---	---	--

9. Решить задачу целочисленного программирования с целевой функцией  $z = 5x + 9y + 3 \rightarrow \max$  и ограничениями:

$$\begin{cases} y - x - 3 \leq 0, \\ y + x - 14 \leq 0, \\ x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{Z}, \\ x \geq 0, y \geq 0. \end{cases}$$

- графическим способом;
- методом Гомори;
- дать геометрическую интерпретацию введения дополнительного ограничения.

### Теоретические вопросы для подготовки к зачету

- Задача оптимизации. Постановка задач математического и линейного программирования. Примеры задач оптимизации с экономическим содержанием.
- Производственная функция. Однофакторные и многофакторные производственные функции. Примеры производственных функций.
- Виды производственных функций. Изокванты. Примеры.
- Функции полезности. Линии безразличия. Примеры. Оптимальный набор товаров при заданном бюджетном множестве.
- Функция спроса и его эластичность
- Предельные величины в экономике. Предельные издержки и предельный доход. Связь с оптимизацией прибыли.
- Предельная полезность. Предельная норма замещения  $MRS_{X_k, X_l}(x_1, \dots, x_n)$  товара  $X_k$  товаром  $X_l$ .
- Функция полезности и предельная полезность. Изоклина.
- Предельная норма замещения набора из двух товаров. Задача об оптимальном наборе товара с данным уровнем полезности (с данной стоимостью) и ее решение.
- Предельная норма замещения набора из двух ресурсов. Задача об оптимальном производственном плане с данным уровнем издержек (с данным объемом производства) и ее решение.
- Задача линейного программирования, целевая функция, допустимое множество задачи, оптимальное решение, оптимальное множество.
- Каноническая и стандартная форма задач линейного программирования. Приведение ЗЛП, заданной в стандартной форме, к канонической форме.
- Каноническая и стандартная форма задач линейного программирования. Приведение ЗЛП, заданной в канонической форме, к стандартной форме.
- Графический метод решения задачи ЛП в случае двух переменных.
- Симплекс-метод решения задачи линейного программирования.
- Как по симплекс-таблице задачи линейного программирования можно сказать: а) задача не имеет решений; б) допустимое решение может быть

улучшено. Приведите примеры.

17. Как по симплекс-таблице задачи линейного программирования можно сказать: а) допустимое решение оптимально; б) есть альтернативное решение. Приведите примеры.

Б.П.	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	С.Ч.
$x_3$	5	-2	1	0	3
$x_4$	-1	3	0	1	4
$f$	-2	-3	0	0	10

18. Является ли симплекс-таблица для ЗЛП на минимум окончательной? Ответ обоснуйте. Найдите решение ЗЛП или сделайте вывод о неразрешимости задачи.

Б.П.	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	С.Ч.
$x_3$	5	-2	1	0	3
$x_4$	-1	3	0	1	4
$f$	-2	3	0	0	10

19. Является ли симплекс-таблица для ЗЛП на минимум окончательной? Ответ обоснуйте. Найдите решение ЗЛП или сделайте вывод о неразрешимости задачи.

Б.П.	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	С.Ч.
$x_3$	-5	-2	1	0	3
$x_4$	-1	3	0	1	4
$f$	2	-3	0	0	10

20. Является ли симплекс-таблица для ЗЛП на минимум окончательной? Ответ обоснуйте. Найдите решение ЗЛП или сделайте вывод о неразрешимости задачи.

Б.П.	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	С.Ч.
$x_3$	5	-2	1	0	3
$x_4$	-1	3	0	1	4
$f$	0	-3	0	0	10

21. Является ли симплекс-таблица для ЗЛП на минимум окончательной? Ответ обоснуйте. Найдите решение ЗЛП или сделайте вывод о неразрешимости задачи.

Б.П.	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	С.Ч.
$x_3$	5	-2	1	0	3
$x_4$	-1	3	0	1	4
$f$	2	3	0	0	10

22. Является ли симплекс-таблица для ЗЛП на максимум окончательной? Ответ обоснуйте. Найдите решение ЗЛП или сделайте вывод о неразрешимости задачи.

23. Постановка транспортной задачи как задачи линейного программирования. Закрытая и открытая модель транспортной задачи. Приведите примеры.

24. Методы построения начального опорного плана транспортной задачи

(метод северо-западного угла, метод минимального тарифа, метод аппроксимации Фогеля). Приведите примеры и сравните общую стоимость перевозок для полученных опорных планов.

25. Метод потенциалов решения транспортной задачи.
26. Постановка взаимно-двойственных задач. Экономическая суть понятия двойственности.
27. Теоремы двойственности для симметричных задач
28. Транспортная задача как задача линейного программирования. Закрытая и открытая модель транспортной задачи.
29. Метод искусственного базиса.
30. Двойственный симплекс-метод (ДСМ). Псевдорешение. Условия применимости ДСМ.
31. Постановка задачи целочисленного программирования. Примеры задач с экономическим содержанием.
32. Метод Гомори решения задачи целочисленного программирования.
33. Постановка задачи выпуклого программирования.
34. Необходимые условия оптимальности (условия Куна-Таккера).
35. Достаточные условия оптимальности.
36. Задача квадратичного программирования с выпуклой целевой функцией.
37. Связь задачи выпуклого программирования с задачей нахождения седловых точек.
38. Теорема Куна-Таккера.
39. Метод динамического программирования.
40. Принцип оптимальности и уравнение Беллмана.
41. Модели управления запасами.
42. Постановка задачи многокритериальной оптимизации.
43. Доминирование и оптимальность по Парето. Эффективные решения и паретова граница.

### **Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений**

Соответствующие приказы, распоряжения ректората о контроле уровня освоения дисциплин и сформированности компетенций студентов.

### **8. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины**

#### **Основная литература:**

1. Методы оптимальных решений в экономике и финансах: Учебник / Под ред. В.М. Гончаренко, В.Ю. Попова.- М.: КноРус, 2017. – 400 с. – [Электронный ресурс]. - Режим доступа: <https://book.ru/book/927791>
2. Фомин, Г.П. Математические методы в экономике: 777 задач с комментариями и ответами: учебное пособие / Фомин Г.П. — М.: КноРус, 2019. — 327 с. — ISBN 978-5-4365-1456-7. - [Электронный ресурс]. - Режим доступа: <https://book.ru/book/933713> (для бакалавров и магистров).

### **Дополнительная литература:**

3. Методы оптимальных решений: Учебник / Мастяева И.Н., Горемыкина Г.И., Семенихина О.Н. - М.: КУРС, НИЦ ИНФРА-М, 2017. - 384 с. – [Электронный ресурс]. - Режим доступа: <http://znanium.com/catalog/product/765578>

### **9. Перечень ресурсов информационно-коммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины**

1. Электронная таблица EXCEL MS Office.
2. Банк России (ЦБ): [www.cbr.ru](http://www.cbr.ru).
3. Московская Межбанковская валютная биржа: [www.micex.ru](http://www.micex.ru).
4. Федеральная служба государственной статистики: [www.gks.ru](http://www.gks.ru)
5. Информационный портал Всемирного банка: <http://data.worldbank.org>.
6. Электронная библиотека ([www.bibliotekar.ru](http://www.bibliotekar.ru))

### **10. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины**

Изучение дисциплины необходимо начинать с предварительного ознакомления с рабочей программой по дисциплине. Прежде всего, необходимо ознакомиться с содержанием рабочей программы дисциплины, с целями и задачами, сформулированными в данной дисциплине, ее связями с другими дисциплинами образовательной программы, методическими разработками по данной дисциплине, имеющимися на образовательном портале и сайте кафедры, с графиком консультаций преподавателей кафедры.

#### ***Рекомендации по подготовке к практическим (семинарским) занятиям.***

Целью семинарских занятий является усвоение студентами теоретических основ изучаемой дисциплины.

В этой связи студентам необходимо: при подготовке к очередному семинарскому занятию по лекциям, монографиям и литературным источникам проработать теоретический материал, соответствующей темы занятия, обратив особое внимание на дискуссионные, проблемные вопросы;

- при подготовке к практическим занятиям следует обязательно использовать наряду с лекциями и рекомендованной литературой, методическими инструкциями.

- в начале занятий задать преподавателю вопросы по материалу, вызвавшему затруднения в его понимании, заданных для самостоятельного решения;

- в ходе семинара давать конкретные, четкие ответы по существу вопросов.

#### ***Методические рекомендации по выполнению различных форм самостоятельных домашних заданий***

Самостоятельная работа студентов по дисциплине включает в себя выполнение следующих видов заданий: изучение методологии и методики анализа деятельности организаций; подготовку домашних заданий в виде решений задач и тестов, подготовку докладов по проблемным и дискуссионным вопро-

сам, решение ситуаций, способствующих приобретению практических навыков по проведению анализа для принятия управленческих решений.

Перечисленные задания ориентированы на более глубокое усвоение материала изучаемой дисциплины. В рабочей программе дисциплины по каждой теме названы виды заданий для самостоятельной работы.

К выполнению заданий для самостоятельной работы предъявляются следующие требования: задания должны исполняться самостоятельно и представляться в установленный срок, а также соответствовать установленным требованиям по оформлению. Студентам следует руководствоваться графиком самостоятельной работы, определенным РПД; выполнять все плановые задания, выдаваемые преподавателем для самостоятельного выполнения, и разбирать на семинарах и консультациях неясные вопросы; при подготовке к зачету параллельно прорабатывать соответствующие теоретические и практические разделы дисциплины, фиксируя неясные моменты для их обсуждения на плановой консультации.

### ***Методические рекомендации по работе с литературой***

Любая форма самостоятельной работы студента (подготовка к семинарскому занятию, написание эссе, курсовой работы, доклада и т.п.) начинается с изучения соответствующей литературы, как в библиотеке, так и дома. К каждой теме учебной дисциплины подобрана основная и дополнительная литература.

Основная литература - это нормативные акты и рекомендованные учебные пособия.

Дополнительная литература - это дополнительные монографии, сборники научных трудов, справочные материалы, энциклопедии, интернет ресурсы.

Рекомендации студенту:

- выбранную монографию или статью целесообразно внимательно просмотреть. В книгах следует ознакомиться с оглавлением и научно - справочным аппаратом, прочитать аннотацию и предисловие. Целесообразно ее пролистать, рассмотреть иллюстрации, таблицы, диаграммы, приложения. Такое поверхностное ознакомление позволит узнать, какие главы следует читать внимательно, а какие - прочитать быстро;

- в книге или журнале, принадлежащие самому студенту, ключевые позиции можно выделять маркером или делать пометки на полях. При работе с Интернет - источником целесообразно также выделять важную информацию;

- если книга или журнал не являются собственностью студента, то целесообразно записывать номера страниц, которые привлекли внимание. Позже следует возвратиться к ним, перечитать или переписать нужную информацию. Физическое действие по записыванию помогает прочно заложить данную информацию в «банк памяти».

**11. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине, включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем**

**11.1. Комплект лицензионного программного обеспечения:**

- 1) Продукты компании Microsoft, включая ОС Windows 7 и Office 2010
- 2) Kaspersky Endpoint Security

**11.2. Современные профессиональные базы данных:**

1) База данных Системы комплексного раскрытия информации «СКРИН»  
—<http://www.skrin.ru/>

2) База данных Федеральной службы государственной статистики:  
<http://www.gks.ru/>

**11.3. Информационные справочные системы:**

- 1) Электронный периодический справочник «Система ГАРАНТ»
- 2) Справочно-правовая система КонсультантПлюс
- 3) Официальный интернет-портал правовой информации  
<http://pravo.gov.ru> (доступ свободный).

**11.4. Сертифицированные программы и аппаратные средства защиты информации** - не предусмотрены.

**12. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине**

1. Учебная аудитория для проведения учебных занятий, предусмотренных программой магистратуры, оснащенная оборудованием и техническими средствами обучения.

2. Помещение для самостоятельной работы. Помещение для самостоятельной работы обучающихся оснащено компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду Финансового университета.